Математика 230911   07.12.2023

Урок №61

Тема: Геометрический смысл производной функции – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке.

Срок сдачи работ до 08.12.2023

Теоретическая часть:

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

1) Геометрический смысл производной;

2) Алгоритм нахождения касательной к графику функции в точке;

3) Сравнение производных заданной функции по ее графику в различных точках.

Глоссарий по теме

Число k= tgα называется угловым коэффициентом прямой, а угол α – углом между этой прямой и осью Ох.

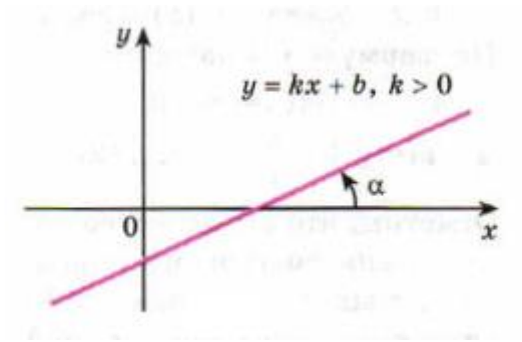
Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

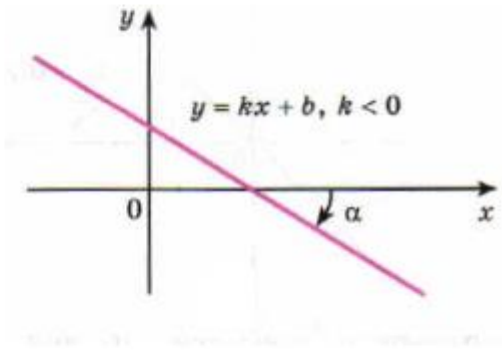
Напомним, что графиком линейной функции y=кх + b является прямая.

Число k= tgα называется угловым коэффициентом прямой, а угол α – углом между этой прямой и осью Ох.

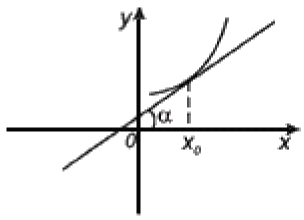
Если k>0, то 0<α< π/2, в этом случае функция возрастает



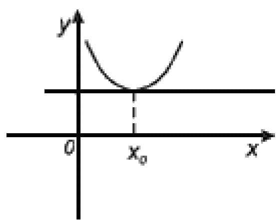
Если k<0, то - π/2<α<0, в этом случае функция убывает



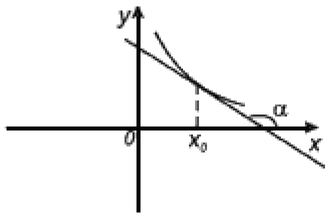
Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$

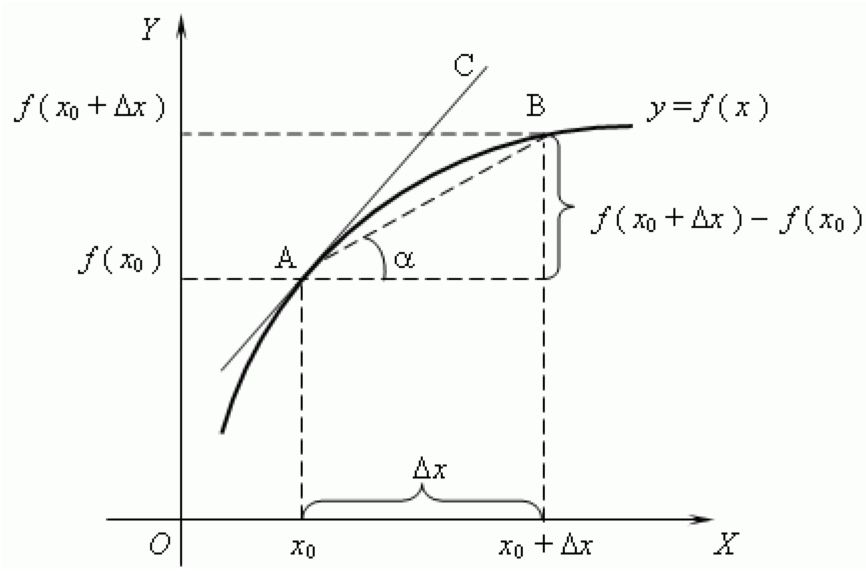


$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$

Рассмотрим график функции $y = f(x)$:



Из рисунка видно, что для любых двух точек *A* и *B* графика функции: f(x0+Δx)/f(x0)Δx=tgα, где α - угол наклона секущей *AB*.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей.

Если зафиксировать точку *A* и двигать по направлению к ней точку *B*, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая *AB* приближается к касательной *AC*.

Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке *A*.

Отсюда следует:

производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.

В этом и состоит геометрический смысл производной.

Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке x_0:

$$y = f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a)$$

Домашнее задание:

1. **Законспектировать и разобрать решение примеров:**

№1. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x+e^{-2x}$, параллельной прямой $y=-x$

Решение:

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания x_0. Т.к. касательная параллельна прямой $y=-x$, значит ее угловой коэффициент равен –1. Таким образом, $f'(x_0) = -1$.

$$f'(x_0) = (x_0 + e^{-2x_0})' = 1 - 2e^{-2x_0};$$
$$1 - 2e^{-2x_0} = -1;$$
$$2e^{-2x_0} = 2;$$
$$e^{-2x_0} = 1;$$
$$-2x_0 = 0;$$
$$x_0 = 0.$$

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 0; f'(x_0) = -1; f(x_0) = 1$$

Уравнение касательной: $y=1-1(x-0) = 1-x$

Ответ: $y=1-x$.

№2. На параболе $y=x^2-2x-8$ найти точку М, в которой касательная к ней параллельна прямой $4x+y+4=0$.

Решение:

Определим угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-2x-8$:

$k = y'=(x^2-2x-8)'=2x-2$.

Найдем угловой коэффициент прямой $4x+y+4=0$:

$y=-4x-4$, $k=-4$.

Касательная к параболе и данная прямая по условию параллельны. Следовательно, их угловые коэффициенты равны, т.е.

$2x-2=-4$;

$x=-1$ – абсцисса точки касания.

Ординату точки касания М вычислим из уравнения данной параболы $y=x^2-2x-8$, т.е.

$y(-1)=(-1)^2-2(-1)-8=-5$, $M(-1;-5)$.

Ответ: $M(-1;-5)$.

2. Решить задание № 253б) и № 255б)